

**ANALIZA
MATEMATICĂ**

**CULEGERE
DE PROBLEME**

CLASA A XI-A

Capitolul I – Șiruri de numere reale

| | |
|---|----|
| 1. Șiruri mărginite | 9 |
| 2. Șiruri nemărginite | 11 |
| 3. Șiruri monotone | 12 |
| 4. Șiruri nemonotone | 15 |
| 5. Stabilirea convergenței șirurilor cu ajutorul teoremei cu ε | 16 |
| 6. Șiruri divergente | 17 |
| 7. Șiruri cu limita $+\infty$, respectiv $-\infty$ | 18 |
| 8. Utilizarea criteriului majorării | 19 |
| 9. Utilizarea criteriului majorării la $+\infty$ | 22 |
| 10. Exemple de șiruri convergente la zero | 23 |
| 11. Utilizarea operațiilor cu șiruri convergente | 25 |
| 12. Utilizarea criteriului raportului pentru limite de șiruri | 28 |
| 13. Utilizarea teoremei de convergență a șirurilor monotone | 31 |
| 14. Trecerea la limită în inegalități | 32 |
| 15. Numărul e | 33 |
| 16. Numărul armonic $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Constanta lui Euler | 37 |
| 17. Stabilirea unor inegalități legate de limitele unor șiruri. Rapiditatea de convergență | 40 |
| 18. Utilizarea teoremei „cleştelui” | 45 |
| a) Probleme cu majorări și minorări de sume | 45 |
| b) Probleme cu majorări și minorări de produse, puteri, radicali și factoriale | 47 |
| c) Probleme cu evaluări ale ordinilor de convergență | 48 |
| 19. Subsșiruri. Lema lui Cesàro | 52 |
| 20. Șiruri fundamentale. Criteriul lui Cauchy | 53 |
| 21. Operații cu șiruri cu limite infinite. Cele 7 cazuri exceptate | 54 |
| 22. Calculul limitei în cazurile exceptate prin prelucrarea algebrică a termenului general | 59 |
| a) Darea de factor comun forțat (urmată eventual de simplificări) | 59 |
| b) Explicitarea termenului general prin calculul unor sume, produse, expresii | 59 |
| c) Amplificarea cu conjugata, urmată de simplificări | 62 |
| d) Unele utilizări speciale ale numărului e | 62 |
| e) Alte explicitări | 63 |
| (α) Limitele unor șiruri trigonometrice | 63 |
| (β) Limitele unor părți întregi și fracționare | 64 |
| 23. Utilizarea lemei lui Stolz și a consecințelor sale | 64 |
| 24. Determinarea unor limite pe baza formulei lui Stirling | 67 |
| 25. Unele probleme legate de convergența șirurilor | 69 |
| 26. Studiul unor șiruri definite prin relații de recurență | 70 |
| a) Relații de recurență liniare de ordinul I neomogene | 70 |
| b) Relații de recurență liniare de ordinul II omogene | 72 |
| (α) Probleme în cazul $\Delta > 0$ | 73 |
| (β) Probleme în cazul $\Delta = 0$ | 75 |
| (γ) Probleme în cazul $\Delta < 0$ | 75 |

| | |
|---|----|
| c) Complemente la relațiile de recurență omogene | 76 |
| d) Relații de recurență omografice | 76 |
| (α) Cazul punctelor fixe distincte ($\Delta \neq 0$) | 76 |
| (β) Cazul punctelor fixe egale ($\Delta = 0$) | 78 |
| e) Ecuații de recurență neliniare – câteva explicitări | 79 |
| f) Șiruri recurente definite de ecuații neliniare de forma $x_{n+1} = f(x_n)$ (cu x_1 dat), care nu se explicitază | 80 |
| (α) Probleme în cazul f strict crescătoare | 80 |
| (β) Probleme în cazul f strict descrescătoare | 82 |
| g) Câteva șiruri recurente care satisfac anumite inegalități | 82 |
| h) Câteva relații de recurență privind mai multe șiruri | 84 |
| 27. Studiul unor șiruri derivate din anumite șiruri recurente | 84 |
| a) Studiul unor șiruri de forma (na_n) cu $a_n \rightarrow 0$ | 84 |
| b) Studiul unor șiruri de forma $(\frac{b_n}{n})_n$ cu $b_n \rightarrow \infty$ | 85 |
| c) Alte probleme în care sunt implicate șiruri recurente | 85 |
| 28. Studiul elementar al câtorva serii pe baza șirului sumelor parțiale .. | 86 |

Capitolul II - Limite de funcții

| | |
|--|-----|
| 1. Definiții și exemple | 90 |
| 2. Exemple de aplicare a teoremei cu δ și ε | 95 |
| 3. Exemple de funcții care nu au limită | 95 |
| 4. Limite laterale | 86 |
| 5. Exemple de aplicare a criteriului majorării | 98 |
| 6. Operații cu limite de funcții | 100 |
| 7. Exemple de aplicare a teoremei „cleștelui” | 103 |
| 8. Calculul limitelor aflate în cazurile exceptate la operații cu limite de funcții | 104 |

Capitolul III – Funcții continue

| | |
|---|-----|
| Scurtă schiță teoretică | 115 |
| 1. Noțiuni de bază. Exemple și contraexemple | 118 |
| 2. Operații cu funcții continue. Contraexemple | 120 |
| 3. Prelungirea prin continuitate | 120 |
| 4. Identitatea unor funcții care coincid pe \mathbb{Q} | 121 |
| 5. Câteva ecuații funcționale în mulțimea funcțiilor continue | 121 |
| a) Câteva funcții continue constante | 121 |
| b) Ecuațiile funcționale ale lui Cauchy | 122 |
| c) Câteva ecuații reducibile la ecuațiile lui Cauchy. Alte ecuații funcționale | 124 |
| 6. Proprietăți de marginire ale funcțiilor continue | 124 |
| 7. Proprietatea valorii intermediare (a lui Darboux) și inversarea funcțiilor continue | 125 |
| 8. Funcții cu puncte fixe | 126 |

Capitolul IV – Derivate

| | |
|--|-----|
| Scurtă schiță teoretică | 126 |
| 1. Calculul câtorva derivate | 129 |
| 2. Probleme legate de interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct | 130 |

| | |
|--|-----|
| 3. Utilizarea derivatei logaritmice | 131 |
| 4. Proprietăți ale derivatelor unor funcții | 131 |
| 5. Calculul unor derivate de ordin superior. Aplicații | 132 |
| 6. Verificarea unor identități în care intervin derivatele | 133 |

Capitolul V — Proprietăți ale funcțiilor derivabile pe intervale.

Reprezentarea grafică a lor

| | |
|--|-----|
| Scurtă schiță teoretică | 133 |
| 1. Determinarea punctelor de extrem ale câtorva funcții | 137 |
| 2. Determinarea intervalelor de monotonie ale unor funcții, pe baza studierii semnelui derivatei | 138 |
| 3. Verificarea aplicabilității teoremelor lui Rolle, Lagrange și Cauchy pentru câteva funcții | 138 |
| 4. Separarea rădăcinilor unor ecuații pe baza șirului lui Rolle. Discuție | 139 |
| 5. Determinarea punctului c din teorema lui Lagrange pentru câteva funcții | 139 |
| 6. Stabilirea unor inegalități cu ajutorul teoremei lui Lagrange | 140 |
| 7. Stabilirea caracterului constant al unor funcții cu ajutorul consecinței 1 a teoremei lui Lagrange | 141 |
| 8. Stabilirea faptului că două funcții diferă printr-o constantă pe anumite intervale, cu ajutorul consecinței 2 a teoremei lui Lagrange | 142 |
| 9. Stabilirea unor inegalități cu ajutorul consecinței 3 a teoremei lui Lagrange, folosind comparația cu valorile funcției în punctele de extrem | 143 |
| 10. Stabilirea unor inegalități cu ajutorul consecinței 3 a teoremei lui Lagrange, folosind comparația cu limita la ∞ | 145 |
| 11. Unele inegalități privind poziția punctului c din teorema lui Lagrange | 147 |
| 12. Stabilirea unor inegalități privind ordinele de convergență | 147 |
| 13. Studiul derivabilității unor funcții în anumite puncte cu ajutorul consecinței 4 a teoremei lui Lagrange | 148 |
| 14. Aplicarea regulii lui L'Hospital pentru determinarea limitelor unor funcții în cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$ | 149 |
| 15. Reducerea cazului exceptat $0 \cdot \infty$ la una din formele $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ | 150 |
| 16. Reducerea cazului exceptat $\infty - \infty$ la forma $0 \cdot \infty$ | 151 |
| 17. Reducerea cazurilor exceptate 1^∞ , ∞^0 și 0^0 la posibilitatea de aplicare a regulii lui L'Hospital | 151 |
| 18. Aplicarea formulei lui Taylor - Mac Laurin pentru câteva funcții .. | 152 |
| 19. Determinarea câtorva limite de funcții cu ajutorul aplicării formulei lui Taylor - Mac Laurin | 152 |
| 20. Determinarea intervalelor de convexitate, concavitate și a punctelor de inflexiune | 153 |
| 21. Determinarea asimptotelor graficelor de funcții | 153 |
| 22. Reprezentări grafice de polinoame, funcții raționale și funcții cu modul | 154 |

| | |
|--|------------|
| 23. Reprezentări grafice de funcții cu radicali | 155 |
| 24. Reprezentări grafice de funcții exponențiale, logaritmice și de tip $u(x)^{v(x)}$ | 155 |
| 25. Reprezentări grafice de funcții trigonometrice directe și inverse | 156 |
| 26. Reprezentarea grafică a funcțiilor cu parametru | 157 |
| 27. Determinarea unor funcții ce depind de parametri prin anumite condiții geometrice impuse graficului | 157 |
| Probleme cu un parametru | 157 |
| Probleme cu doi parametri | 159 |
| Probleme cu trei și patru parametri | 159 |
| 28. Câteva probleme de extrem | 160 |
| Capitolul VI – 100 de probleme recapitulative cu grad sporit de dificultate | 162 |
| Indicații și soluții | 173 |
| Bibliografie | 378 |
| Comentarii și recomandări bibliografice | 379 |
| Autorii de drept ai unor probleme | 379 |

1. ȘIRURI MĂRGINITE

1.1. Definiție. Un șir $(a_n)_n$ se numește **șir mărginit** dacă există două numere $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $a \leq a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă are loc numai egalitatea $a \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, șirul se numește **mărginit inferior**, iar dacă are loc numai inegalitatea $a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ șirul se numește **mărginit superior**.

1.2. Propoziție. Un șir $(a_n)_n$ este mărginit dacă și numai dacă există un număr real $M > 0$, astfel încât $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Să se arate că următoarele șiruri sunt mărginite:

$$a) x_n = \frac{2n+3}{3n+8}; \quad b) x_n = \frac{n}{n^2+1};$$

$$c) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}, \quad (n \geq 2);$$

$$d) b_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}; \quad e) c_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3};$$

$$f) d_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2+2^2} + \dots + \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2};$$

$$g) a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}; \quad h) a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

2. i) Utilizând inegalitatea lui Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$), să se arate că șirul de termen general $a_n = \sqrt[n]{n}$ este mărginit.

ii) Utilizând inegalitatea lui Bernoulli: să se arate că

$$(1+t)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{t}{n}, \quad (t \in \mathbb{R}, t > -1; n \in \mathbb{N}^*).$$

iii) Cu ajutorul inegalității de mai sus, să se arate că șirul de termen general $b_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$, ($a > 1$) este mărginit.

3. Să se arate că $0 \leq \lg n < n$ și să se deducă apoi mărginirea șirului de termen general $a_n = \sqrt[n]{\lg n}$.

4. i) Să se demonstreze prin inducție matematică după k inegalitatea

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}^*, k \leq n.$$

ii) Se consideră șirul $(e_n)_n$ de termen general $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Să se demonstreze că șirul este mărginit, stabilind inegalitatea

$$\boxed{2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5. i) Să se stabilească inegalitatea $\left(\frac{n+1}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (cu partea a doua valabilă pentru $n \geq 2$).

ii) Să se stabilească prin metoda inducției matematice inegalitatea

$$\boxed{\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

(cu partea a doua valabilă pentru $n \geq 6$).

iii) Utilizând inegalitatea de la punctul ii), să se arate că următoarele șiruri sunt mărginite:

$$(\alpha) a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad (\beta) a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}; \quad (\gamma) a_n = \sqrt[n^2]{n!}; \quad (\delta) a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

6. Să se stabilească inegalitatea $C_n^k \geq C_n^2$, pentru $2 \leq k \leq n-2$ și să se deducă mărginirea șirului $(a_n)_n$ de termen general

$$a_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} + \frac{1}{C_n^3} + \dots + \frac{1}{C_n^n}.$$

7. i) Să se arate că șirul $(E_n)_n$ de termen general $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ este mărginit.

ii) Notând, ca și mai înainte, $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, să se arate că $e_n \leq E_n$ și să se deducă și pe această cale mărginirea șirului $(e_n)_n$.

8. i) Fie $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Fără a utiliza metoda inducției matematice, să se stabilească inegalitățile:

$$(\alpha) 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right);$$

$$(\beta) 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < S_n < 2\sqrt{n}.$$

ii) Să se arate că șirul $(a_n)_n$, de termen general $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$ este mărginit.

9. i) Notând $\Omega_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \Omega_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad (\text{Se recomandă și căutarea unei demonstrații directe, în afară de inducția matematică.})$$

ii) Să se deducă mărginirea șirului $(a_n)_n$ de termen general $a_n = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \sqrt{n}$.

10. Să se arate că următoarele șiruri sunt mărginite:

b) $a_n = A \cos \frac{n\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4};$

c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n;$ d) $a_n = \frac{2^n + 3^n + (-5)^n}{7^n}.$

2. ȘIRURI NEMĂRGINITE

I.3. Definiție. Un șir $(a_n)_n$ care nu satisface definiția I.1. se numește **șir nemărginit**. Un șir $(a_n)_n$ care nu este mărginit inferior (superior) se numește **șir nemărginit inferior** (respectiv **superior**).

I.4. Propoziție. a) Un șir $(a_n)_n$ este nemărginit dacă și numai dacă pentru orice numere $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n < a$ sau $a_n > b$.

b) Un șir $(a_n)_n$ este nemărginit dacă și numai dacă pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $|a_n| > M$.

I.5. Axioma mărginirii superioare (a lui Cantor). Orice mulțime nevidă de numere reale, majorată, admite margine superioară.

I.6. Propoziție. (Proprietatea lui Arhimede). Pentru orice numere $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $na > b$.

I.7. Consecință. (Enunț echivalent cu propoziția I.6) Pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ unic, astfel încât $n \leq x < n + 1$.

I.8. Definiție. Unicul număr $n \in \mathbb{Z}$, din consecința precedentă se numește **partea întregă** a numărului real x și se notează $n = [x]$. Deci $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$. Diferența $x - [x]$ se numește **partea fracționară** a numărului x și se notează $\{x\}$. Deci $\{x\} = x - [x]$.

11. Să se arate că următoarele șiruri sunt nemărginite:

a) $a_n = n^2 + 3n + 2;$ b) $a_n = \frac{n^3}{n^2 + 1};$ c) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2};$
 d) $a_n = n!;$ e) $a_n = \alpha^n$ ($\alpha > 1$); f) $a_n = n^\beta$ ($\beta > 0$);
 g) $a_n = \frac{\alpha^n}{n}$ ($\alpha > 1$); h) $a_n = \frac{\alpha^n}{n^\beta}$ ($\alpha > 1; \beta > 1$); i) $a_n = C_{2n}^n;$
 j) $a_n = \log_2 3 + \log_3 4 + \dots + \log_n(n + 1).$

12. Utilizând inegalitatea din problema 9, să se arate că șirul de termen general $a_n = \frac{1}{\Omega_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}$ este nemărginit.

13. Utilizând inegalitatea din problema 5, punctul b), să se arate că următoarele șiruri sunt nemărginite:

a) $u_n = \frac{3^n(n + 1)!}{n^n};$ b) $v_n = \frac{n^{n+1}}{2^n \cdot n!};$ c) $w_n = \sqrt[n]{n!}.$

14. i) Utilizând partea stângă a inegalității lui Cauchy generalizate, de exponent subunitar:

$sb^{s-1}(b - a) < b^s - a^s < sa^{s-1}(b - a);$ ($0 < a < b; s \in (0, 1)$),

să se stabilească inegalitatea $n^2 (\sqrt[n]{n} - 1) > \sqrt[n]{n}(n - 1)$.

ii) Să se arate că șirul $(a_n)_n$ de termen general $a_n = n^2 (\sqrt[n]{n} - 1)$ este nemărginit.

15. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (numărul armonic de ordinul n).

i) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ avem: $\frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{2p} > \frac{1}{2}$.

ii) Să se demonstreze inegalitatea $H_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$, ($2 \leq k \in \mathbb{N}$).

iii) Să se arate că șirul $(H_n)_n$ este nemărginit.

16. a) Să se arate că șirul $a_n = (-1)^n \cdot n$ este nemărginit.

b) Să se arate că șirul $a_n = q^n$ ($q < -1$) este nemărginit.

c) Să se arate că, dacă $(a_n)_n$ este un șir nemărginit, atunci șirul $b_n = (-1)^n \cdot a_n$ este, de asemenea, nemărginit.

d) Să se arate, printr-un contraexemplu, că dacă șirul $(a_n)_n$ este nemărginit, nu rezultă neapărat că șirul $(a_n^{a_n})_n$ este, de asemenea, nemărginit.

3. ȘIRURI MONOTONE

I.9. **Definiție.** Un șir $(a_n)_n$ se numește:

i) șir **strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

ii) șir **crescător** dacă $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

iii) șir **strict descrescător** dacă $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

iv) șir **descrescător** dacă $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Un șir care este strict crescător sau care este strict descrescător se numește **șir strict monoton**.

Un șir care este crescător sau care este descrescător se numește **șir monoton**.

I.10. **Observații**

a) Pentru studiul monotoniei unui șir $(a_n)_n$ se are în vedere abordarea unuia dintre următoarele cinci demersuri:

1) **Calculul diferenței a doi termeni consecutivi.** Se aduce la o formă cât mai convenabilă diferența a doi termeni consecutivi oarecare $a_{n+1} - a_n$ sau $a_n - a_{n+1}$, i se stabilește semnul și, dacă acest semn este constant, atunci se decide în funcție de acesta, sensul relației de ordine dintre cei doi termeni consecutivi și deci sensul monotoniei șirului. (Aceasta este metoda cea mai des folosită.)

2) **Calculul raportului a doi termeni consecutivi.** În cazul în care *toți termenii șirului sunt strict pozitivi*, studiul monotoniei se poate face și aducând la o formă cât mai convenabilă raportul a doi termeni consecutivi $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sau $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ și comparându-l cu 1. După cum raportul este subunitar sau supraunitar, se decide relația de ordine dintre cei doi termeni consecutivi și deci sensul monotoniei șirului.

3) **Prelucrarea algebrică a uneia dintre relațiile de mărime.** Se scrie una dintre relațiile $a_n < a_{n+1}$ sau $a_{n+1} < a_n$ și se prelucerează utilizând regulile algebrice uzuale, până când se aduce inegalitatea la o formă echivalentă despre care se poate decide dacă este adevărată sau falsă. În funcție de aceasta, se decide monotonia șirului.

4) **Metoda inducției matematice.** (În special pentru șirurile definite recurent.) Se consideră una dintre inegalitățile $a_n < a_{n+1}$ sau $a_{n+1} < a_n$ (sugerată în majoritatea cazurilor de relația dintre a_1 și a_2) și se încearcă stabilirea acestei inegalități prin inducție.

5) **Utilizarea anumitor inegalități remarcabile.**

b) Dacă un șir $(a_n)_n$ este crescător, atunci $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$, deci șirul este mărginit inferior (nestrict) de a_1 .

Dacă un șir $(a_n)_n$ este descrescător, atunci $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$, deci șirul este mărginit superior (nestrict) de a_1 .

c) Dacă există un număr $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$, șirul se numește **șir constant**.

17. Fie un șir $(x_n)_n$ de termen general $x_n = \frac{an + b}{cn + d}$ (numit **șir omografic**), cu $c, d > 0$ și fie $\delta = ad - bc$. Să se arate că:

$$\delta \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{șirul } (x_n)_n \text{ este strict crescător;} \\ = 0 & \Rightarrow \text{șirul } (x_n)_n \text{ este șir constant;} \\ < 0 & \Rightarrow \text{șirul } (x_n)_n \text{ este strict descrescător.} \end{cases}$$

18. a) i) Să se arate că șirul $(a_n)_n$ de termen general

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

este strict crescător.

ii) Aceeași problemă pentru șirul $(b_n)_n$ de termen general

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

iii) Să se arate că $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (Identitatea lui E. Catalan).

b) Să se arate că șirul $(a_n)_n$ de termen general $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este strict descrescător.

c) Fie $a > 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_n$ de termen general $x_n = \frac{a^n - 1}{n}$ este strict crescător.

d) Să se arate că șirul $(a_n)_n$ de termen general $a_n = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{-1}$ este strict crescător.

19. Să se stabilească monotonia șirurilor:

a) $\Omega_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n};$

b) $W_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{\Omega_n^2} \cdot \frac{1}{2n+1}.$

20. Fie șirurile $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$ și $b_n = S_n - 2\sqrt{n+1}$, cu $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. În baza inegalităților din problema 8, să se stabilească monotonia șirurilor $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$.

21. (Monotonia șirurilor $(e_n)_n$, $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ și $(f_n)_n$, $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.)

a) Utilizând inegalitatea mediilor aplicată numerelor:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1,$$

să se arate că șirul $(e_n)_n$ este strict crescător.

b) Utilizând inegalitatea mediilor aplicată numerelor

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad a_{n+2} = 1,$$

să se arate că șirul $(f_n)_n$ este strict descrescător.

22. (Monotonia șirurilor $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$; $g_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; ($n > 1$).

a) Utilizând inegalitatea mediilor aplicată numerelor:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1,$$

să se arate că șirul $(g_n)_n$ este strict crescător.

b) Să se arate că $\frac{1}{g_n} = f_{n-1}$ și să se regăsească și pe această cale faptul că șirul $(f_n)_n$ este strict descrescător.

23. (Varianta a stabilirii monotoniei șirurilor $(e_n)_n$ și $(f_n)_n$ bazată pe inegalitatea lui Bernoulli)

a) Să se arate că $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$. Aplicând apoi

inegalitatea lui Bernoulli, să se arate că: $\frac{e_{n+1}}{e_n} > \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$

și să se deducă, din nou, monotonia șirului $(e_n)_n$;

b) Să se arate că $\frac{f_n}{f_{n+1}} = \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$. Aplicând apoi

inegalitatea lui Bernoulli, să se arate că: $\frac{f_n}{f_{n+1}} > \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1$

și să se deducă, din nou, monotonia șirului $(f_n)_n$.

Observație. Considerând șirul $(x_n(\alpha))_n$, $x_n(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$, se poate arăta, prin procedee de calcul diferențial (problema 653), că șirul este strict descrescător dacă și numai dacă $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Dacă $\alpha < \frac{1}{2}$ șirul este strict crescător cu înepere de la $n > \frac{\alpha}{1-2\alpha}$.

24. Să se arate că șirul de termen general $a_n = \log_n(n+1)$, $n \geq 2$, este strict descrescător.

25. a) Fie $a_n = \sqrt[n]{n}$ ($n \geq 3$). Să se arate că șirul este strict descrescător;

b) Să se determine monotonia șirurilor: $b_n = \sqrt[n]{n+1}$, ($n \geq 2$),

$$c_n = \sqrt[n+1]{n}, d_n = \sqrt[n+1]{n!}.$$

26. Să se arate că șirurile $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ și $b_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ sunt strict monotone.

27.* Să se demonstreze că șirul $x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ este strict descrescător.

28.* Să se demonstreze că:

a) Șirul $a_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$ ($n \geq 2$) este strict descrescător.

b) Șirul $a_n = \frac{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2}{n}$ ($n \geq 2$) este strict crescător.

4. ȘIRURI NEMONOTONE

I.11. Definiție. Un șir $(a_n)_n$ care nu este monoton se numește **nemonoton**.

I.12. Observație. Pentru a stabili că un șir este nemonoton se arată că nici una dintre inegalitățile din definiția I.9 nu este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

29. Să se arate că următoarele șiruri sunt nemonotone:

$$\text{a) } a_n = (-1)^n; \quad \text{b) } a_n = \cos \frac{n\pi}{2}; \quad b_n = \sin \frac{n\pi}{2}; \quad \text{c) } a_n = \operatorname{tg}(2n+1) \frac{\pi}{4}.$$

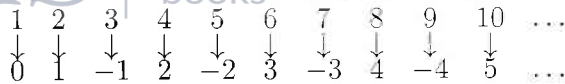
Observație: Au loc relațiile: $\cos n\pi = (-1)^n$ și $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$.

30. Să se arate că șirul $a_n = (-1)^n n$ este nemonoton.

Exerciții cu caracter teoretic

31. a) Să se dea un exemplu de șir mărginit, nemonoton. b) Să se dea un exemplu de șir nemărginit, monoton.

32. Fie funcția bijectivă $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definită de diagrama:



sau, echivalent:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pentru } n \text{ par} \\ -\frac{(n-1)}{2} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

Notând $f(n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cum este șirul $(a_n)_n$ din punct de vedere al mărginirii și monotoniei?

5. STABILIREA CONVERGENȚEI ȘIRURILOR CU AJUTORUL TEOREMEI CU ε

I.13. Definiție (a convergenței șirurilor cu ajutorul vecinătăților). Un șir $(a_n)_n$ se numește șir **convergent** dacă există un număr $a \in \mathbb{R}$, astfel încât, pentru orice vecinătate V a lui a să existe un rang depinzând de V , notat $N(V)$, astfel încât $a_n \in V, \quad \forall n \geq N(V)$.

Schema simplificată:

$$(a_n)_n \text{ convergent} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\exists)a \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \forall V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow (\exists)N(V) \in \mathbb{N} \\ \text{a.î.} a_n \in V, \forall n \geq N(V) \end{array} \right] 1)$$

I.14. Propoziție. (Proprietatea de separare a lui Hausdorff). Pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, există două vecinătăți U și V ale lui a , respectiv b , astfel ca $U \cap V = \emptyset$.²⁾

I.15. Propoziție. (Unicitatea limitei). Dacă un șir $(a_n)_n$ este convergent, numărul a din definiția I.13 este unic.

I.16. Definiție (a limitei). Unicul număr $a \in \mathbb{R}$ din definiția I.13 se numește **limita șirului** $(a_n)_n$ și se scrie: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sau $a_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} a$.

I.17. Teoremă³⁾ (de convergență cu ε). Un șir $(a_n)_n$ este convergent dacă și numai dacă există un număr $a \in \mathbb{R}$, astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe un rang depinzând de ε , notat $N(\varepsilon)$, astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$.

Schema simplificată:

$$(a_n)_n \text{ convergent} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\exists)a \in \mathbb{R}, \quad \text{a.î.} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists)N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \\ \text{a.î.} |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon) \end{array} \right]$$

I.18. Observație. Cu excepția studiului cu caracter teoretic al unor șiruri, cum ar fi cele din observația I.22, pentru stabilirea limitei se lucrează cu teorema cu ε , nu cu definiția cu vecinătăți, deoarece teorema se pretează la calcule.

¹⁾ S-a notat cu $\mathcal{V}(a)$ mulțimea vecinătăților lui a .

²⁾ Într-un context mai general (în unele spații topologice) o astfel de proprietate, nederivând din definiția spațiului topologic, este luată drept axiomă (numită axioma de separare a lui Hausdorff) și conduce la clasa spațiilor topologice separate.

³⁾ În unele expuneri această teoremă este dată drept definiție. Atunci definiția I.13, devine teoremă.

I.19. Teoremă (Teorema de mărginire a șirurilor convergente). Orice șir convergent este mărginit.

33. Utilizând teorema de convergență cu ε , să se arate că:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5n+7} = \frac{2}{5}$;
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+b}{cn+d} = \frac{a}{c}$ ($c \neq 0$); e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ ($\alpha > 0$); f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} = 0$, ($q > 1$).
 g) Orice șir constant este convergent și limita este constanta însăși.

I.20. Observație (premergătoare criteriului majorării). Atunci când se lucrează cu teorema de convergență cu ε , la rezolvarea unor inecuații de forma $|a_n - a| < \varepsilon$, nu se cere **prima valoare** n de la care începe să fie satisfăcută inegalitatea, ci **una dintre valorile** de acest fel. Dacă expresia $|a_n - a|$ este complicată (și deci rezolvarea inecuației este dificilă), dar se poate obține o inegalitate de forma: $|a_n - a| \leq b_n$, unde b_n este o expresie mai ușor de manevrat, atunci este suficient să se găsească o valoare n de la care începe să fie satisfăcută inecuația $b_n < \varepsilon$, pentru că imediat va decurge și $|a_n - a| < \varepsilon$.

34. (Exerciții premergătoare criteriului majorării)

Utilizând teorema de convergență cu ε și observația I.20, să se arate că:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2^n} = 0$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n+3} = \frac{1}{2}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n+1}{2n^3+5n+3} = \frac{1}{2}$.

6. ȘIRURI DIVERGENTE

I.21. Definiție (a divergenței șirurilor). Un șir $(a_n)_n$ care nu este convergent se numește **șir divergent**. Calitatea unui șir de a fi convergent sau divergent se numește **natura** șirului.

I.22. Observație. Dacă un șir este divergent, pot apărea următoarele situații:

- i) șirul este divergent dar mărginit; ex. : $a_n = (-1)^n$;
 ii) șirul este divergent și nemărginit:
 - superior; exemplu: $a_n = n$;
 - inferior; exemplu: $a_n = -n$;
 - atât superior cât și inferior; exemplu: $a_n = (-1)^n n$.

35. a) Să se demonstreze cu ajutorul definiției I.13 (cu vecinătăți) că șirurile din observația I.22 sunt divergente.

b) Să se demonstreze că șirul $a_n = \operatorname{tg}(2n+1) \frac{\pi}{4}$ este divergent.

36. Să se demonstreze că șirul $a_n = \sin n$ este divergent.

37. În ce caz șirul $x_n = a^n$ ($a \in \mathbb{R}$, dat) este divergent?